на правах рукописи

Мазуркевич Елена Олеговна

СМЕШАННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА В УСЛОВИЯХ ПОРЯДКОВОЙ МОНОТОННОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К МОДЕЛЯМ РАВНОВЕСИЯ

01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ — 2007

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Казанский государственный университет имени В.И. Ульянова-Ленина".

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Коннов Игорь Васильевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Попов Леонид Денисович,
	доктор физико-математических наук, профессор Фазылов Валерий Рауфович
Ведущая организация:	Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН.

Защита состоится 25 января 2007 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного Совета Д 212.081.21 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская 18, корп. 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 22 декабря 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного
Совета к.ф.-м.н., доцент О.А. Задворнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Вариационные неравенства являются одним из наиболее удобных инструментов для формулирования и исследования различных задач равновесия. В диссертационной работе рассматриваются смешанные вариационные неравенства, которые составляют промежуточный класс по отношению к однозначным и многозначным вариационным неравенствам, поскольку включают нелинейное отображение и недифференцируемую функцию. Они были введены С. Лескарретом и Ф. Браудером. С одной стороны, их источником являются обычные вариационные неравенства, теоретическое исследование которых начинается с работ Г.Фикеры и Г.Стампаккьи в связи с приложениями в математической физике, и в дальнейшем это направление развивалось многими известными учеными, такими как К. Байокки и А. Капело, Ф.Е. Браудер, Х. Брезис, Г. Дюво и Ж.-Л. Лионс. С другой стороны, это задача выпуклой недифференцируемой оптимизации. Класс задач с монотонными потенциальными отображениями, соответствующий выпуклой недифференцируемой оптимизации, является наиболее разработанным во многом благодаря вкладу В.Ф. Демьянова, И.И. Ерёмина, Ж. Моро, Б.Н. Пшеничного, Н.З. Шора, Ф. Вулфа, Е.Г. Гольштейна, В.Л. Левина, К. Лемарешаля, Е.А. Нурминского, Б.Т. Поляка, Р.Т. Рокафеллара, А.М. Рубинова и других авторов. Значительное продвижение в области решения монотонных вариационных неравенств связано с развитием метода регуляризации, предложенного А.Н. Тихоновым. Большой вклад в это направление внесли работы А.Б. Бакушинского, Ф.П. Васильева, Б.Т. Поляка, В.В. Васина, Л.Д. Попова, М.Ю. Кокурина и других. Методы решения смешанных вариационных неравенств с монотонным (строго, сильно) основным отображением, использующие различные схемы расщепления, предлагались в работах А.С. Антипина, И.Б. Бадриева и О.А. Задворнова, Дж. Бертсекаса и Дж. Экштейна, Р. Брука, Д. Габея, И.В. Коннова, А.В. Лапина, П.-Л. Лионса и В. Мерсье, П. Ценга и других авторов. С развитием теории вариационных неравенств были выявлены их глубокие связи с задачами дополнительности, седловой точки и игрового равновесия, что открыло принципиально новые области приложений в экономике, в системах транспорта и связи, в социальных науках. Значительный вклад в эту область внесли К.Дж. Эрроу, Ж. Дебре, Х. Никайдо, Г. Розен, С. Карамардян, Й.Ш. Панг, С. Дафермос, П. Харкер, А. Нагурней и другие. Для многих прикладных задач, в особенности в экономике и теории игр, основное отображение не удовлетворяет, как правило, условиям потенциальности и монотонности, а лишь более слабым условиям порядковой монотонности. Более того, для многих задач экономического и игрового равновесия не удается гарантировать невырожденность этого отображения, что ставит значительные трудности как при получении результатов существования и единственности решений, так и при разработке численных методов. Поэтому тематика рассматриваемых в диссертации вопросов является актуальной как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

Цель исследований. Основная цель работы состоит в получении результатов существования и единственности решения для смешанных вариационных неравенств в условиях порядковой монотонности и вырожденности основного отображения, разработке и исследовании численных методов решения таких задач, и в применении полученных результатов для достаточно широких классов задач теории экономического равновесия, которые могут быть сформулированы в виде рассматриваемых смешанных вариационных неравенств.

Методы исследований. В работе используются методы дифференцируемой и недифференцируемой оптимизации, выпуклого анализа, нелинейного анализа.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми и состоят в получении результатов существования и единственности решения смешанных вариационных неравенств в условиях порядковой монотонности, нелинейности и вырожденности основного отображения, возникающих при исследовании задач экономического равновесия, а также в построении и исследовании быстро сходящихся методов решения таких задач.

Достоверность результатов работы обеспечивается строгими математическими доказательствами, хорошим совпадением результатов численных экспериментов с точными решениями для тестовых задач.

Практическое значение. Разработанные подходы, методы и алгоритмы применимы для численного решения задач экономического равновесия различных типов, включающих негладкие функции, а также могут быть использованы при решении и других прикладных задач, возникающих, в частности, в математической физике и теории игр.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета (2001 – 2006 гг.), на Республиканской научно-практической конференции "Интеллектуальные системы и информационные технологии", г. Казань, 30 октября – 1 ноября 2001г.; на Всероссийской молодежной научной школе-конференции "Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач", г. Казань, 19 – 23 ноября 2001 г.; на Четвертом Всероссийском семинаре "Сеточные методы для краевых задач и приложения", г. Казань, 13 – 16 сентября 2002 г.; на Шестом Всероссийском семинаре "Сеточные методы для краевых задач и приложения", г. Казань, 1 – 4 октября 2005 г.; на XIII Международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики", г. Казань, 27 – 31 мая 2002 г.; на Шестом Национальном конгрессе SIMAI, Chia Laguna (Италия), 27 – 31 марта 2002 г.; на Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения", г. Екатеринбург, 24 – 28 февраля 2003 г.; на 8-ом Международном симпозиуме по обобщенной выпуклости и обобщенной монотонности, г. Варезе (Италия), 4 – 8 июля 2005 г.; на научных семинарах кафедр экономической кибернетики, прикладной математики и вычислительной математики КГУ (2005 – 2006 гг.); на семинаре отделения математического моделирования НИИММ им. Н. Г. Чеботарева КГУ, 2005 г.

Исследования по тематике диссертации выполнялись в рамках основного научного направления КГУ "Экстремальные и равновесные задачи экономики и систем управления", получали поддержку в рамках проектов Фонда НИОКР РТ и НИР ИПИ АН РТ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 17 работ, в том числе одна статья [10] в издании из списка ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы и изложена на 114 страницах. Список литературы состоит из 148 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, формулируется цель работы, проводится обзор литературы по исследуемой теме, излагается краткое содержание диссертации.

В **первой** главе приведена постановка задачи смешанного вариационного неравенства в условиях порядковой монотонности основного отображения, получены результаты существования и единственности решения такой задачи. Кроме того, обоснованы итеративные методы решения смешанных вариационных неравенств на основе спуска по D-интервальной функции.

В **разделе 1.1** дается постановка задачи смешанного вариационного неравенства, а также приводятся некоторые общие результаты из теории оптимизации и вариационных неравенств.

Пусть задано выпуклое множество K в пространстве R^n, отображение $G : V \to R^n$ и выпуклая, но необязательно дифференцируемая функция $f : V \to R$, где $K \subseteq V \subseteq R^n$. *Смешанное вариационное неравенство* состоит в определении точки $x^* \in K$ такой, что

$$\langle G(x^*), x - x^* \rangle + f(x) - f(x^*) \geq 0 \quad \forall x \in K. \tag{1}$$

Мы будем рассматривать задачу (1) при следующих предположениях:

(A1) *Отображение $G : V \to R^n$ непрерывно, где V – выпуклое открытое подмножество R^n.*

(A2) *Множество K имеет вид параллелепипеда, т.е. $K = K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$, где $K_i = [\alpha_i, \beta_i] \subseteq [-\infty, +\infty]$ для всех $i = 1, \dots, n$,* при этом $K \subseteq V$.

(A3) *Функция $f : V \to R$ выпукла на V и имеет вид: $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i)$.*

Для индексного множества $L = \{i_1, \dots, i_l\} \subseteq N = \{1, ..., n\}$ обозначим $x_L = (x_i)_{i \in L}$, через $A_L(x)$ – квадратную матрицу с элементами $\frac{\partial G_i(x)}{\partial x_j}$ для $i, j \in L$, через I_L – единичную матрицу соответствующего порядка.

Для векторов из R^n можно ввести обычное упорядочение $\geq$ с помощью неотрицательного ортанта R^n_+[1], т.е. $x \geq y$ означает, что $x - y \in R^n_+$. Теперь напомним ряд свойств порядковой монотонности для отображений.

Определение 1 Отображение $G : K \to R^n$ называется

a) *P-отображением*, если для любой пары точек $x, y \in K$, $x \neq y$, существует индекс i такой, что $(x_i - y_i)(G_i(x) - G_i(y)) > 0$;

b) *строгим P-отображением*, если существует число $\gamma > 0$ такое, что $G - \gamma I_N$ есть P-отображение;

c) *P_0-отображением*, если для любой пары точек $x, y \in K$, $x \neq y$, существует индекс i такой, что $x_i \neq y_i$ и $(x_i - y_i)(G_i(x) - G_i(y)) \geq 0$;

d) *Z-отображением (или внедиагонально антитонным)*, если для любой пары точек $x, y \in K, x \geq y$ выполняется $G_k(x) \leq G_k(y)$ для любого индекса k такого, что $x_k = y_k$;

[1] По определению, $R^n_+ = \{x \in R^n \mid x_i \geq 0, i = 1, ..., n\}$.

e) *M-отображением*, если оно одновременно является P- и Z-отображением;

f) *M_0-отображением*, если оно одновременно является P_0- и Z-отображением.

В аффинном случае, когда $G(x) = Ax + b$, данные свойства совпадают с соответствующими свойствами матрицы A. Очевидно, что свойства P_0 и P обобщают свойства обычной (соответственно, строгой) монотонности отображения G.

Раздел 1.2 посвящен результатам существования и единственности решений для смешанного вариационного неравенства (1).

Большинство известных результатов существования и единственности решений в задаче (1) требуют усиленных свойств типа P отображения G. Однако такие свойства являются ограничительными для многих прикладных задач, содержащих отображения с вырождением. Показано, что можно получить результаты существования и единственности решений в задаче (1) и при более слабых свойствах отображения G за счет (сильной) строгой выпуклости функции f в ограниченном и неограниченном случае множества K.

Теорема 1 *Пусть выполняются условия (A1) – (A3), и G есть P_0-отображение. Если функции f_i строго выпуклые для $i = 1, \dots, n$, то задача (1) не может иметь более одного решения.*

Следствие 1 *Если, дополнительно к условиям теоремы 1, множество K ограничено, то задача (1) имеет единственное решение.*

Теорема 2 *Пусть выполняются условия (A1) – (A3), и G есть P_0-отображение. Если функции f_i сильно выпуклые для всех $i = 1, \dots, n$, то задача (1) имеет единственное решение.*

Теперь получим результаты существования и единственности решения задачи (1) для случая, когда только часть отображения G обладает усиленными P свойствами.

Теорема 3 *Пусть выполняются условия (A1) – (A3), G – дифференцируемое M_0-отображение. Предположим, что для некоторого множества $L \subset N$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $A_L(x) - \varepsilon I_L$ есть P-матрица для любого $x \in K$. Предположим также, что f_i, $i \in N \backslash L$ – сильно выпуклые функции. Тогда задача (1) имеет единственное решение.*

Теорема 4 *Пусть выполняются условия (A1) – (A3), G – дифференцируемое M_0-отображение. Предположим, что для некоторого множества $L \subset N$, $A_L(x)$ есть P-матрица для любого $x \in K$, а также, что f_i, $i \in N \backslash L$ – сильно выпуклые функции, и K – ограниченное множество. Тогда задача (1) имеет единственное решение.*

В **разделе 1.3** описаны методы решения смешанного вариационного неравенства (1) на основе преобразования исходной задачи к задаче оптимизации в отношении некоторой искусственной интервальной (или, иначе, оценочной) функции.

Рассмотрим функцию $\psi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha(x) - \varphi_\beta(x)$, где $0 < \alpha < \beta$,

$$\varphi_\alpha(x) = \max_{y \in K} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^\alpha(x, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \max_{y_i \in K_i} \Phi_i^\alpha(x, y_i)$$

где

$$\Phi_i^\alpha(x, y_i) = G_i(x)(x_i - y_i) - 0.5\alpha(x_i - y_i)^2 + f_i(x_i) - f_i(y_i)$$

для $i = 1, \ldots, n$ и $\alpha > 0$. Функция $\psi_{\alpha\beta}$ называется D-интервальной для задачи (1) и была вначале предложена для случая $f \equiv 0$ Дж. Пенгом. И.В. Коннов предложил применить ее для смешанного вариационного неравенства и установил дифференцируемость функции $\psi_{\alpha\beta}$, которой не обладает обычная интервальная функция φ_α. Вместо исходной задачи (1) мы можем решать задачу минимизации дифференцируемой функции $\psi_{\alpha\beta}$ на всем пространстве R^n

$$\min_{x \in R^n} \to \psi_{\alpha\beta}(x). \tag{2}$$

Более того, если якобиан основного отображения G есть P - матрица, то задача (1) эквивалентна задаче нахождения стационарной точки для (2), т.е. решению системы нелинейных уравнений $\nabla\psi_{\alpha\beta}(x^*) = 0$. На основе этого свойства в работе предлагаются методы решения исходной задачи (1), использующие спуск по D-интервальной функции.

Для минимизации функции $\psi_{\alpha\beta}$ вначале был применен градиентный метод (ГМ) с линейным поиском типа Армийо. Обозначим стартовую точку методов через z^0.

Теорема 5 *Пусть выполняются условия (A1) – (A3) с $V = R^n$, G – дифференцируемое отображение. Если множество*

$$D(z^0) = \{z \mid \psi_{\alpha\beta}(z) \le \psi_{\alpha\beta}(z^0)\}$$

ограничено, и $\nabla G(x)$ есть P-матрица для любого $x \in K$, то итерационная последовательность метода (ГМ), примененного к задаче (2), сходится к единственному решению задачи (1).

Затем был применен вариант метода сопряженных градиентов (МСГ1), предложенный Л. Гриппо и С. Лусиди для безусловной минимизации дифференцируемых функций.

Теорема 6 *Пусть выполняются условия (A1) – (A3) с $V = R^n$, G – дифференцируемое отображение, множество $D(z^0)$ ограничено, существует выпуклое открытое множество U, содержащее $D(z^0)$, такое, что градиент функции $\psi_{\alpha\beta}$ непрерывен по Липшицу на U, и $\nabla G(x)$ есть P-матрица для любого $x \in K$. Тогда итерационная последовательность метода (МСГ1), примененного к задаче (2), сходится к единственному решению задачи (1).*

Кроме того, для минимизации функции $\psi_{\alpha\beta}$ был использован также другой вариант метода сопряженных градиентов (МСГ2), предложенный Х. Мукаи.

Теорема 7 *Пусть выполняются условия (A1) – (A3) с $V = R^n$, G – дифференцируемое отображение, множество $D(z^0)$ ограничено, и $\nabla G(x)$ есть P-матрица для любого $x \in K$. Тогда итерационная последовательность метода (МСГ2), примененного к задаче (2), сходится к единственному решению задачи (1).*

Таким образом, обоснованы итеративные методы решения смешанного вариационного неравенства (1).

В **разделе 1.4** рассматривается разложимое смешанное вариационное неравенство, где допустимое множество K в (1) допускает представление в виде декартова произведения подмножеств из произвольных конечномерных подпространств, т.е. $K = K_1 \times K_2 \times ... \times K_m$, где $K_s \subseteq R^{n_s}$ для $s \in M = \{1, ..., m\}$, а также $f(x) = \sum\limits_{s \in M} f_s(x_s)$, где $x = (x_s \mid s \in M)$, $x_s \in R^{n_s}$ для $s \in M$, т.е. $m < n$ в общем случае.

Для этой задачи получены результаты существования и единственности решения, которые обобщают утверждения теорем 1 и 2 и следствия 1 на основе соответствующих расширений свойств порядковой монотонности основного отображения.

Во **второй** главе представлены модели экономического равновесия, в которых учитываются различные виды конкуренции. Показано, что при достаточно естественных условиях эти задачи могут быть сформулированы в виде смешанного вариационного неравенства (1). Получены результаты существования и единственности решения для рассматриваемых моделей, а также для них обоснованы различные варианты метода регуляризации.

Раздел 2.1 посвящен общему классу задач равновесия по Вальрасу. Рассмотрим модель равновесия, в которой используется n типов товаров. Для вектора цен $p \in R^n_+$ определяется множество $E(p)$, которое является значением отображения избыточного спроса $E : R^n_+ \to \Pi(R^n)$[2], в общем случае многозначного.

Введем следующее предположение.

(B1) *Цена каждого товара, вовлеченного в рынок, имеет нижнюю положительную границу и может иметь верхнюю границу.*

Другими словами, допустимые цены содержатся в множестве, которое имеет вид параллелепипеда:

$$\begin{gathered} K = K_1 \times K_2 \times ... \times K_n, \\ K_i = \{t \in R \mid 0 < \tau_i^{'} \leq t \leq \tau_i^{''} \leq +\infty\}, i = 1, \dots n. \end{gathered} \tag{3}$$

Тогда равновесные цены определяются вектором $p^* \in K$ таким, что

$$\exists q^* \in E(p^*), \quad \langle q^*, p^* - p \rangle \geq 0 \quad \forall p \in K, \tag{4}$$

что обобщает обычную задачу равновесия в случае $K = R^n_+$.

Для преобразования полученной задачи к виду (1) используем следующее представление отображения избыточного спроса: $E(p) = D(p) - S(p)$, где отображение D однозначно и описывает избыточный спрос участников, поведение которых соответствует моделям совершенной конкуренции, а отображение S предполагается многозначным и описывает избыточное предложение участников, каждый из которых поставляет или приобретает единственный товар. Тогда при данном векторе цен $p \in R^n_+$ отображение S диагонально, т.е. представимо в виде декартова произведения:

$$S(p) = S_1(p_1) \times S_2(p_2) \times ... \times S_n(p_n). \tag{5}$$

Естественно считать каждое отображение $S_i : R_+ \to \Pi(R)$ монотонным для всех $i = 1, \dots, n$, т.е. (избыточное) предложение не убывает по отношению к цене товара. Тогда отображение S представляет собой субдифференциал некоторой функции f, т.е., $S_j = \partial f_j$,

[2] $\prod(R^n)$ означает совокупность всех подмножеств множества R^n.

где $f_j : R_+ \to R$ есть выпуклая функция, для всех $j = 1, \ldots, n$, $f(p) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(p_j)$.

При этих предположениях задача поиска равновесных цен (3), (4) эквивалентно записывается в виде многозначного вариационного неравенства: найти точку $p^* \in K$ такую, что

$$\exists s^* \in S(p^*), \quad \langle D(p^*), p^* - p \rangle + \langle s^*, p - p^* \rangle \geq 0 \quad \forall p \in K.$$

Эта задача эквивалентна смешанному вариационному неравенству

$$\langle G(p^*), p - p^* \rangle + \sum_{i=1}^{n} [f_i(p_i) - f_i(p_i^*)] \geq 0 \quad \forall p \in K, \tag{6}$$

соответствущему задаче (1), где $G = -D$ и $V = R^n_>$[3].

Для получения результатов существования и единственности решения используются дополнительные условия на отображение D.

Определение 2 (a) Отображение D обладает свойством *валовой заменимости*, если $\partial D_j / \partial p_i \geq 0$, $j \neq i$;

(b) Отображение D *положительно однородно степени* m, $0 \leq m \leq 1$, если $D(\alpha x) = \alpha^m D(x)$ для любого $\alpha \geq 0$.

Условие валовой заменимости на (избыточный) спрос является одним из наиболее общепринятых в экономических моделях и означает заменяемость товаров для участников. Условие положительной однородности степени 0 (независимости от масштаба цен) на (избыточный) спрос является также достаточно стандартным и обычно следует из ненасыщаемости потребителей.

(B2) *Отображение D непрерывно дифференцируемо, положительно однородно степени 0 и обладает свойством валовой заменимости на $R^n_>$. Отображение S имеет вид (5), где S_j есть субдифференциал выпуклой функции $f_j : R_+ \to R$, $j = 1, ..., n$.*

Если выполняются условия (B1), (B2), то установлено, что G есть P_0-отображение, кроме того, $\nabla G(p)$ есть M_0-матрица для всех $p \in V$. Отметим, что однородность степени 0 влечет вырожденность якобиана, но, хотя отображение G не является (строгим) P-отображением, его часть может обладать таким свойством.

Теорема 8 *Пусть выполняются условия (B1), (B2). Предположим, что $\tau_i^{''} < +\infty$ для всех $i = 1, \ldots, n$, и существует множество*

[3] $R^n_> = \{x \in R^n \mid x_i > 0, i = 1, ..., n\}$ – положительный ортант, т.е. внутренность R^n_+.

$L \subset N$ такое, что для каждого $p \in K$, выполняется неравенство $\sum\limits_{j \in N \setminus L} \frac{\partial G_i(p)}{\partial p_j} < 0$ для всех $i \in L$. Предположим также, что $f_j, j \in N \setminus L$ – сильно выпуклые функции. Тогда задача (6) имеет единственное решение.

Приведем сходный результат для неограниченного случая.

Теорема 9 *Пусть выполняются условия (B1), (B2). Предположим, что существуют $\delta > 0$ и множество $L \subset N$ такие, что для всех $p \in K$ выполняется $\sum\limits_{j \in N \setminus L} \frac{\partial G_i(p)}{\partial p_j} p_j < -\delta p_i$ для любого $i \in L$. Пусть $f_j, j \in N \setminus L$ – сильно выпуклые функции. Тогда задача (6) имеет единственное решение.*

Поскольку обоснование методов спуска по D-интервальной функции опирается на невырожденность отображения G, а это свойство не выполняется в условиях описанной модели типа Вальраса, то предлагается использовать метод регуляризации.

Обозначим через Q_L квадратную диагональную матрицу порядка n, чьи диагональные элементы определены следующим образом: $q_{ii} > 0,$ если $i \in L, q_{ii} = 0,$ если $i \notin L$.

Мы будем аппроксимировать смешанное вариационное неравенство (6) следующей возмущенной задачей: найти точку $p^\varepsilon \in K$ такую, что

$$\langle G(p^\varepsilon) + \varepsilon Q_L p^\varepsilon, p - p^\varepsilon \rangle + f(p) - f(p^\varepsilon) \geq 0 \quad \forall p \in K, \tag{7}$$

где $\varepsilon > 0$ – параметр, L – непустое подмножество N. Сначала рассмотрим свойства последовательности $\{p^\varepsilon\}$ в ограниченном случае.

Теорема 10 *Пусть выполняются условия (B1), (B2), $\tau_i^{''} < +\infty$ для $i = 1, ..., n$, существует индексное множество $J^{'} \subseteq N$ такое, что для всех $p \in K$ выполняется условие*

$$\sum_{j \in N \setminus J'} \frac{\partial G_i(p)}{\partial p_j} < 0 \quad \text{для} \;\; i \in J^{'}, \tag{8}$$

а также индексное множество $J^{''} \subseteq N$ такое, что f_i, $i \in J^{''}$ – сильно выпуклые функции. Если положить $L = N \setminus J$, $J = J^{'} \cup J^{''}$, то задача (7) имеет единственное решение p^ε, а любая последовательность $\{p^{\varepsilon_k}\}$ такая, что $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$, имеет предельные точки и все эти точки являются решениями задачи (6), (3).

При $J = \emptyset$ теорема 10 обосновывает метод полной регуляризации.

Установлено, что в условиях теоремы 10 якобиан гладкой части возмущенной задачи есть P-матрица, что позволяет решать эту задачу с помощью алгоритмов спуска по D-интервальной функции из раздела 1.3.

Метод регуляризации для неограниченного случая обоснован с помощью усечения допустимого множества и обеспечении сходимости решений возмущенной усеченной задачи к решениям исходной за счет условий типа коэрцитивности, которые гарантируют отсутствие новых решений в усеченной задаче. Рассмотрим регуляризированное усеченное вариационное неравенство: найти точку $p^\varepsilon \in \tilde{K}$ такую, что

$$\langle G(p^\varepsilon) + \varepsilon Q_L p^\varepsilon, p - p^\varepsilon \rangle + f(p) - f(p^\varepsilon) \geq 0 \quad \forall p \in \tilde{K}, \tag{9}$$

где

$$\tilde{K} = \tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2 \times ... \times \tilde{K}_n, \quad \tilde{K}_i = [\tau_i^{'}, \tilde{\tau}_i] \subset (0, +\infty), \tag{10}$$

где $\tau_i^{'} < \tilde{\tau}_i$ и $\tilde{\tau}_i = \tau_i^{''}$, если $\tau_i^{''} < +\infty$, $i = 1, ..., n$.

Теорема 11 *Пусть выполняются условия (B1), (B2), существует ограниченное множество* $W \subseteq K$ *такое, что для любого* $p \in K \backslash W$ *выполняется* $\max\limits_{i=1,...,n} [G_i(p)(p_i - \tau_i^{'}) + f_i(p_i) - f_i(\tau_i^{'})] > 0$. *Предположим, что* $\tilde{K}$ *в (10) выбрано так, что для любого* $i = 1, ..., n$ *и для любого* $w \in W$ *выполняется неравенство* $w_i < \tilde{\tau}_i$, *если* $\tau_i^{''} = +\infty$. *Пусть существует индексное множество* $J^{'} \subseteq N$ *такое, что для любого* $p \in \tilde{K}$ *выполняется (8), и существует индексное множество* $J^{''} \subseteq N$ *такое, что функции* f_i, $i \in J^{''}$, *сильно выпуклые. Тогда задача (9), (10) при* $L = N \backslash J$, $J = J^{'} \cup J^{''}$ *имеет единственное решение* p^ε, *а любая последовательность* $\{p^{\varepsilon_k}\}$ *такая, что* $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$ *имеет предельные точки, и все эти точки являются решениями задачи (6), (3).*

Рассматриваются также различные варианты модели равновесия в условиях, когда отображение избыточного спроса E однозначно. Для них обоснован метод регуляризации с более простыми условиями коэрцитивности.

В **разделе 2.2** рассматривается иной вариант модели равновесия из раздела 2.1, в которой отображение D задается как спрос потребителей с функциями полезности типа Кобба-Дугласа. Спрос i-го потребителя при данном векторе цен $p \in R_+^n$ определяется в виде решения задачи оптимизации:

$$\tilde{D}^{(i)}(p) = Argmax\{\varphi_i(x) \mid \langle p, x\rangle \leq \left\langle p, b^{(i)}\right\rangle, x \in R^n_+\}, \qquad (11)$$

где $b^{(i)} \in R^n_+$ – вектор запасов товаров, $\varphi_i(x)$ – функция полезности i-го потребителя. Предположим, что она имеет вид

$$\varphi_i(x) = \beta_i x_1^{\alpha_{i1}} ... x_n^{\alpha_{in}}, \qquad (12)$$

где $\beta_i > 0$, $\alpha_{ij} \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$, т.е. является функцией типа Кобба-Дугласа. Тогда отображения спроса однозначны. Как и в модели предыдущего раздела $p \to S(p)$ есть отображение избыточного предложения, которое имеет вид (5), причем каждое отображение S_j предполагается монотонным и многозначным. Равновесная цена p^* определяется также как решение задачи (6), где $D(p) = \sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{D}^{(i)}(p) - b$, где $b = \sum\limits_{i=1}^{m} b^{(i)}$ – суммарный запас товаров потребителей. Поэтому задача равновесия может быть задана в виде смешанного вариационного неравенства (6), где $G = -D$, $\partial f_i = S_i$, $i = 1, ..., n$.

(F1) *Отображение* $D(p) = \sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{D}^{(i)}(p) - b$*, где* $\tilde{D}^{(i)}(p)$ *определено в (11), (12). Отображение* S *имеет вид (5), где* S_j *есть субдифференциал выпуклой функции* $f_j : R_+ \to R$*,* $j = 1, ..., n$*.*

Поскольку задача (11), (12) потребительского спроса обеспечивает выполнение свойств валовой заменимости и однородности степени 0 отображений $\tilde{D}^{(i)}$, т.е. и D, то выполняются условия (B2) и отображение $G = -D$ будет иметь тип P_0. На этой основе получены результаты существования и единственности решений.

Теорема 12 *Предположим, что выполняются условия (B1), (F1),* $\tau_i'' < +\infty$ *для всех* $i = 1, \ldots, n$*, и существует индексное множество* $L \subset N$ *такое, что* $\sum\limits_{j \in N \setminus L} \sum\limits_{s=1}^{m} \alpha_{si} b_j^{(s)} > 0$*,* $i \in L$*. Пусть также функции* f_j*,* $j \in N \setminus L$ *сильно выпуклы. Тогда задача (6) имеет единственное решение.*

Установлен подобный результат для неограниченного случая.

Теорема 13 *Предположим, что выполняются условия (B1), (F1), существует* $\varepsilon > 0$ *и индексное множество* $L \subset N$ *такое, что для любого* $p \in K$ *выполняется* $\sum\limits_{j \in N \setminus L} \sum\limits_{s=1}^{m} \alpha_{si} b_j^{(s)} > \varepsilon p_i^2$*,* $i \in L$*. Если, дополнительно, функции* f_j*,* $j \in N \setminus L$*, сильно выпуклы, то задача (6) имеет единственное решение.*

Для описанной модели также построен метод регуляризации, для которого установлена сходимость, в том числе при неограниченном множестве K.

В **разделе 2.3** рассматривается модель экономического равновесия в условиях несовершенной конкуренции – олигополия. Модель описывает поведение n производителей, предлагающих однородный продукт. В этой модели состояние $q^* = (q_1^*, ..., q_n^*)$ определяется как точка равновесия по Нэшу в бескоалиционной игре n лиц с функциями выигрыша $\varphi_i(q) = q_i p(\sum\limits_{i=1}^{n} q_i) - f_i(q_i)$, где $p(\sigma)$ – цена при объеме рынка σ, $f_i(q_i)$ – затраты i-го производителя при объеме производства q_i, т.е.

$$\varphi_i(q^*) \geq \varphi_i(q_1^*, ..., q_{i-1}^*, q_i, q_{i+1}^*, ..., q_n^*), \quad \forall q_i \in [0, \beta_i], \quad i = 1, ..., n.$$

Преобразуем эту задачу к смешанному вариационному неравенству. Следующий набор дополнительных предположений соответствует общепринятому экономическому поведению участников.

(**H1**) *Функция цены $p(\sigma)$ – невозрастающая, непрерывно дифференцируемая, функция дохода $\sigma p(\sigma)$ – вогнута для $\sigma \geq 0$. Функции затрат $f_i : R_+^n \to R$ выпуклые, но в общем случае не обязательно дифференцируемые для $i = 1, \ldots, n$.*

В отличие от ранее используемых условий, здесь допускается недифференцируемость функций затрат, что позволяет учитывать ситуацию, когда существует несколько технологий процесса производства. Из предположений (H1) следует, что i-я функция дохода φ_i вогнута по q_i на R_+. Определим допустимое множество $K = K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$, $K_i = [0, \beta_i]$, $i = 1, \ldots n$; а также многозначное отображение $F : R_+^n \to \Pi(R^n)$ с компонентами $F_i(q) = \partial_{q_i} [-\varphi_i(q)] = G_i(q) + \partial f_i(q_i)$, где $G_i(q) = -p(\sigma_q) - q_i p'(\sigma_q)$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда задача равновесия по Нэшу эквивалентна многозначному вариационному неравенству: найти точку $q^* \in K$ такую, что

$$\exists d_i^* \in \partial f_i(q_i^*), i = 1, \ldots, n; \quad \langle G(q^*), q - q^* \rangle + \sum_{i=1}^{n} d_i^*(q_i - q_i^*) \geq 0 \quad \forall q \in K;$$

или смешанному вариационному неравенству

$$\langle G(q^*), q - q^* \rangle + \sum_{i=1}^{n} [f_i(q_i) - f_i(q_i^*)] \geq 0 \quad \forall q \in K. \tag{13}$$

Получены свойства порядковой монотонности отображения G.

Предложение 1 *Пусть выполняются условия (H1). Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) $\nabla G(q)$ есть P_0-матрица для всех $q \in R^n_+$.

(b) Пусть $p^{'}(\sigma) < 0$ и либо $\mu^{''}(\sigma) < 0$, либо $p^{''}(\sigma) \leq 0$ для всех $\sigma \geq 0$. Тогда $\nabla G(q)$ есть P-матрица для всех $q \in R^n_+$.

Эти свойства позволяют установить результаты существования и единственности решения.

Теорема 14 *Пусть выполняются условия (H1), $p^{'}(\sigma) < 0$ и либо $\mu^{''}(\sigma) < 0$, либо $p^{''}(\sigma) \leq 0$ для всех $\sigma \geq 0$. Тогда задача (13) не может иметь более одного решения. Если, дополнительно, K – ограниченное множество, то задача (13) имеет единственное решение.*

Теорема 15 *Предположим, что выполняются условия (H1), существует $\sigma > 0$ такое, что $-p^{'}(\sigma) \geq \delta > 0$ и либо $-\mu^{''}(\sigma) \geq \delta$, либо $p^{''}(\sigma) \leq 0$ для всех $\sigma \geq 0$. Тогда задача (13) имеет единственное решение.*

Построен также метод регуляризации для этого класса задач. Для обоснования используется обобщение условия ограниченности выпуска, введенное С. Колстадом и Л. Матиесеном. Рассмотрим задачу: найти точку $z^\varepsilon \in \tilde{K}$ такую, что

$$\langle G(z^\varepsilon) + \varepsilon Q_L z^\varepsilon, q - z^\varepsilon \rangle + f(q) - f(z^\varepsilon) \geq 0 \quad \forall q \in \tilde{K}, \tag{14}$$

$$\tilde{K} = \prod_{i=1}^{n} [0, \tilde{\beta}_i], \; 0 < \tilde{\beta}_i < +\infty \;\text{ и }\; \tilde{\beta}_i = \beta_i \;\text{ если } \beta_i < +\infty \text{ для } \; i = 1, ..., n. \tag{15}$$

Таким образом, используется регуляризация и усечение вариационного неравенства (13).

Теорема 16 *Предположим, что выполняются условия (H1), производственный выпуск ограничен так, что для любого $i = 1, \ldots, n$ и для любого $p \in K \bigcap P$ выполняется $p_i < \tilde{\beta}_i$, если $\beta_i = +\infty$ и пусть существует индексное множество $J \subseteq N$ такое, что $f_i(q_i)$ – сильно выпуклые функции для $q_i \in [0, \tilde{\beta}_i]$ и $i \in J$. Если положить $L = N \backslash J$, то задача (15), (14) имеет единственное решение z^ε, а последовательность $\{z^{\varepsilon_k}\}$ такая, что $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$, имеет предельные точки, и все эти точки являются решениями задачи (13).*

Получены также результаты сходимости метода регуляризации для случая, когда функции затрат f_i, $i = 1, ..., n$, непрерывно дифференцируемые.

В **главе 3** описываются результаты численного решения задач равновесия с помощью алгоритмов спуска по D-интервальной функции из раздела 1.3.

В **разделе 3.1** рассматривается задача экономического равновесия типа Вальраса, представляющая собой вариант модели из раздела 2.2. Предполагается, что каждый потребитель имеет спрос лишь на один товар, что задается простейшим видом функции полезности Кобба-Дугласа. Приведены результаты численных расчетов на различных тестовых задачах.

В **разделе 3.2** рассматривается численное решение модельных задач экономического равновесия с общими функциями полезности типа Кобба-Дугласа. Приведены результаты численных расчетов на тестовых задачах с различными исходными данными с помощью методов спуска по D-интервальной функции.

В **разделе 3.3** описано применение алгоритмов из раздела 1.3 для решения задач олигополистического равновесия. Расчеты проводились на различных модельных задачах размерности $n \leq 50$ с точностью $\varepsilon = 0.01$ и $\varepsilon = 0.0001$. Кроме того, проведены расчеты на реальной прикладной задаче, описывающей рынок электроэнергии, которая представляет модель олигополистического равновесия с негладкими функциями затрат. Проведенные численные расчеты показали достаточно быструю сходимость и хорошее соответствие с исходной системой.

В **разделе 3.4** приведены результаты численных расчетов на различных тестовых задачах размерности $n \leq 50$ для смешанных вариационных неравенств, выполненные с помощью методов спуска по D-интервальной функции. Также для поиска решения описанных задач использовалась комбинация метода регуляризации со спуском по D-интервальной функции на основе метода сопряженных градиентов и градиентного метода.

Приведенные расчеты показали достаточную эффективность предложенных методов решения.

Основные результаты диссертации

1. Теоремы существования и единственности решений для смешанных вариационных неравенств в условиях вырожденности и порядковой монотонности основного отображения и теоремы о сходимости методов спуска по D-интервальной функции для решения таких смешанных вариационных неравенств.

2. Теоремы существования и единственности решения для разложимых смешанных вариационных неравенств в условиях вырожденности и обобщенной порядковой монотонности.

3. Теоремы существования и единственности для смешанных моделей экономического равновесия типа Вальраса, содержащих многозначные отображения.

4. Теоремы существования и единственности для модели равновесия в условиях несовершенной конкуренции (олигополии) с негладкими функциями затрат.

5. Теоремы о сходимости метода регуляризации для модели экономического равновесия типа Вальраса в виде (смешанного) вариационного неравенства с вырожденным и порядково монотонным отображением и для модели несовершенной конкуренции (олигополии) с негладкими функциями затрат.

Список публикаций по теме диссертации

1. Волоцкая (Мазуркевич) Е.О. Решение смешанных вариационных неравенств на основе безусловной минимизации / Е.О. Волоцкая (Мазуркевич) // Труды респ. научно-практ. конф.: Интеллектуальные системы и информ. технологии. Казань:Отечество. 2001. С. 194.

2. Коннов И.В. Применение D-интервальных функций к задачам экономического равновесия / И.В. Коннов, Е.О. Мазуркевич // Тез. докл. XIII межд-ной конф.: Проблемы теор. кибернетики. М.: Изд-во МГУ. 2002. С.94.

3. Коннов И.В. Об одной модели равновесия в условиях олигополии / И.В. Коннов, Е.О. Мазуркевич // Математическое программирование и приложения. Екатеринбург, 24-28 февраля 2003 г. Тез. докл. Информ. бюллетень АМП. Екатеринбург, 2003. Вып. 10. С. 153.

4. Коннов И.В. Модель равновесия в условиях олигополии с несколькими технологиями / И.В.Коннов, Е.О.Мазуркевич // Иссл. по информатике. ИПИ АН РТ. Казань:Отечество. 2003.Вып.5. С.57-70.

5. Коннов И.В. Модель равновесия с функцией спроса типа Кобба-Дугласа / И.В. Коннов, Е.О. Мазуркевич // Исследования по информатике. ИПИ АН РТ. Казань: Отечество. 2003. Вып. 6. С. 57–70.

6. Коннов И.В. Метод регуляризации для смешанных вариационных неравенств / И.В. Коннов, Е.О. Мазуркевич // Исследования по информатике. ИПИ АН РТ. Казань: Отечество. 2005. Вып.9. С.55–71.

7. Мазуркевич Е.О. Применение D-интервальных функций к одной задаче равновесия / Е.О.Мазуркевич // Материалы Четвертого Все-

российского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения". Казань: Изд-во Казан. матем. общ-ва. 2002. С. 77–79.

8. Мазуркевич Е.О. Метод регуляризации для модели равновесия с функцией спроса типа Кобба-Дугласа / Е.О.Мазуркевич // Иссл. по информатике. ИПИ АН РТ. Казань:Отечество. 2004.Вып.8.С.97-108.

9. Мазуркевич Е.О. Метод регуляризации для смешанных вариационных неравенств / Е.О. Мазуркевич // Материалы Шестого Всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения". Казань: КГУ. 2005. С. 167.

10. Мазуркевич Е.О. Метод регуляризации для задач олигополистического равновесия / Е.О. Мазуркевич // Изв. вузов. Математика. 2006. N 12. С. 69–74.

11. Partitionable mixed variational inequalities / E. Allevi, A. Gnudi, I.V. Konnov, E.O. Mazurkevich // Quaderni DMSIA, Italy: University of Bergamo. 2003. No. 7. 13 pp.

12. Partitionable mixed variational inequalities / E. Allevi, A. Gnudi, I.V. Konnov, E.O. Mazurkevich // Variational Analysis and Applications, Ed. by F.Giannessi and A.Maugeri, "Nonconvex Optimization and Its Applications", Vol.79. New York: Springer. 2005. P. 133–146.

13. Konnov I.V. Mixed variational inequalities and economic equilibrium problems: Preprint / I.V. Konnov, E.O. Volotskaya (Mazurkevich) // Quaderni DMSIA, Italy: University of Bergamo. 2001. No. 16. 21 pp.

14. Konnov I.V. Mixed variational inequalities and economic equilibrium problems / I.V. Konnov, E.O. Volotskaya (Mazurkevich) // VI Congresso Nazionale della SIMAI, Chia Laguna, 27-31 maggia 2002, Roma: Abstracts. 2002. P. 63.

15. Konnov I.V. Mixed variational inequalities and economic equilibrium problems / I.V. Konnov, E.O. Volotskaya (Mazurkevich) // J. of Appl. Math. 2002. V. 2, No. 6. P. 289–314.

16. Konnov I.V. On a regularization method for variational inequalities with P_0 mappings / I.V. Konnov, E.O. Mazurkevich, M. Ali // J. Appl. Math. Comput. Sci. 2005. V. 15, No. 1. P. 101-110.

17. Volotskaya (Mazurkevich) E.O. On a class of economic equilibrium problems / E.O. Volotskaya (Mazurkevich) // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Казан. матем. об-во. Казань: Изд. "ДАС", 2001. Т. 13. С. 241–257.